

Naujas Pitagoro teoremos įrodymas

Martynas Janušaitis ir Ernest Mickelevič

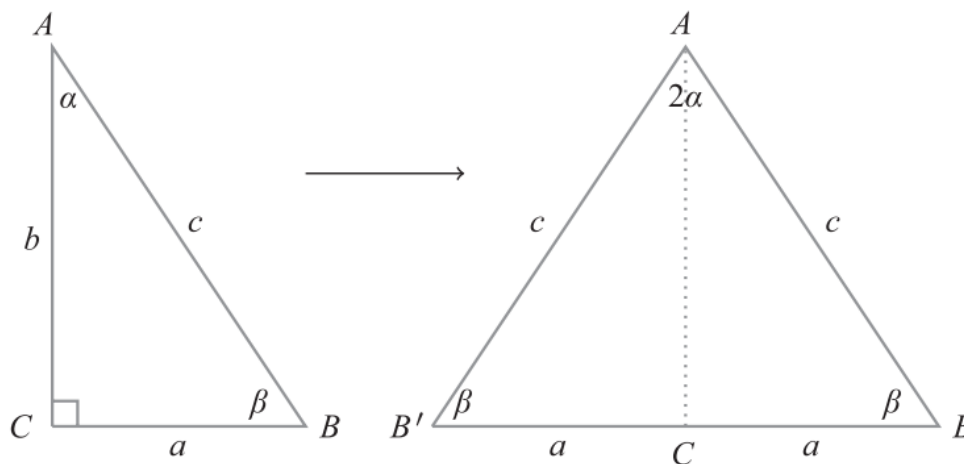
Santrauka. Šiame straipsnyje trumpai aptariamas naujas Pitagoro teoremos įrodymas, suformuluotas 2023 metais dviejų amerikiečių merginų - Ne'Kiya Jackson ir Calcea Johnson, kuriuos tuo metu dar mokėsi mokykloje. Šis Pitagoro teoremos įrodymas ypatingas tuo, kad jo pagrindą sudaro trigonometrija. Anksčiau buvo manoma, kad tokiu metodu įrodyti Pitagoro teoremos neįmanoma dėl trigonometrinės tapatybės - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, kuri yra susijusi su Pitagoro teorema.

Įrodymas

Naudodami trigonometrinės savybes, kurios nėra susijusios su Pitagoro teorema, pagrįsime tokią išraišką:

$$a^2 + b^2 = \frac{2ab}{\sin 2\alpha} = c^2 \quad (1)$$

Tarkime, kad plokštumoje turime statųjį trikampį ABC , kur AC ir CB , jo statiniai, o AB - įžambinė. Atliekame atspindžio transformaciją kraštinės AC atžvilgiu ir gauname lygiašonį trikampį - ABB' .

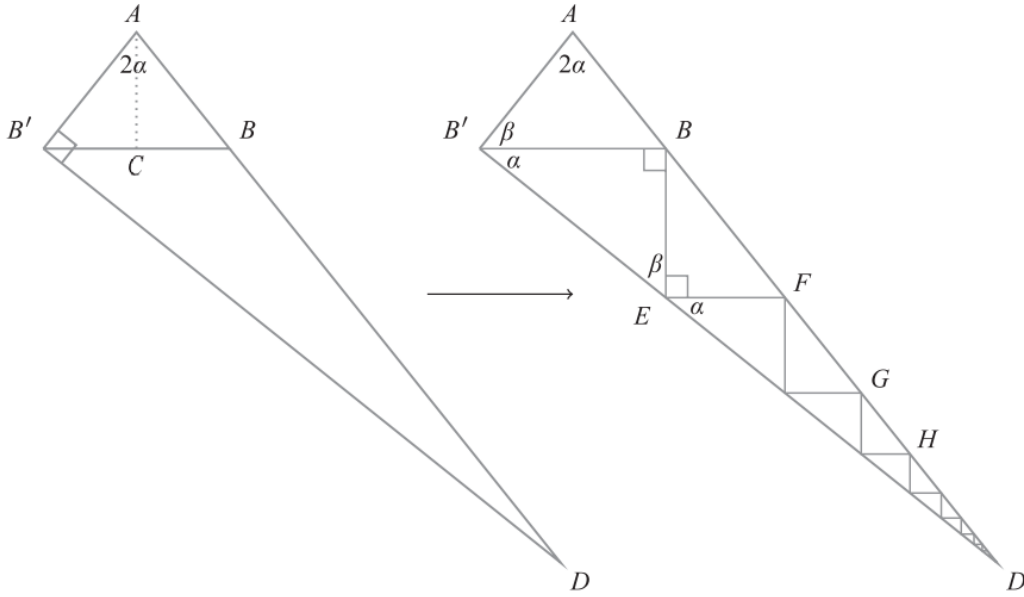


1 pav.: Trikampis ABB' .

Sukonstravę trikampį ABB' , galime gauti išraišką: $\frac{2ab}{\sin 2\alpha} = c^2$. Remdamiesi sinusų teorema nustatome, jog $\frac{\sin 2\alpha}{2a} = \frac{\sin \beta}{c}$. Taip pat pagal pradinį trikampį ABC žinome, jog $\sin \beta = \frac{b}{c}$. Atlikę keletą pertvarkymų, gauname norimą išraišką:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 2\alpha}{2a} &= \frac{\sin \beta}{c} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{2a} = \frac{\frac{b}{c}}{c} \Rightarrow \\
\frac{\sin 2\alpha}{2a} &= \frac{b}{c^2} \Rightarrow \\
\frac{\sin 2\alpha}{2a} \cdot \frac{1}{b} &= \frac{b}{c^2} \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \\
\frac{\sin 2\alpha}{2ab} &= \frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2 = \frac{2ab}{\sin 2\alpha}
\end{aligned}$$

Dabar sukonstruosime statųjį trikampį $AB'D$, primenantį vaflinį ledų ragelį (kaip pavaizduota 2 pav.), kurio statusis kampas bus viršūnė B' ($\angle BB'D = \alpha$, nes pagal prielaidą $\alpha + \beta = 90^\circ$, todėl $\angle BB'D = 90^\circ - \beta = \alpha$). Trikampis $AB'D$ yra užpildytas begaliniu skaičiumi mažesnių trikampių, kurie yra panašūs į trikampį ABC (kaip parodyta dešinėje 2 pav. pusėje).



2 pav.: Statusis trikampis $AB'D$.

Taip pat remdamiesi šiuo naujuoju trikampiu $AB'D$ pasižymėkime išraišką:

$$\sin 2\alpha = \frac{B'D}{AD} \quad (2)$$

Dabar norėdami išsiaiškinti kraštinių $B'D$ ir AD ilgius remsimės nebe trigonometrija, bet geometrine progresija.

Žinome, kad trikampiai, kurie sudaro *vaflinį ledų ragelį*, yra panašūs į trikampį ABC . Pažvelgę į trikampį $BB'E$, matome, jog kraštinė BB' , pagal kampus, atitinka trikampio ABC kraštinę AC , kurios ilgis - b , taip pat žinome, kad kraštinės BB' yra - $2a$. Vadinasi trikampio $BB'E$ kraštinės ilgis buvo apskaičiuotas trikampio ABC kraštinės AC ilgį padauginus iš $\frac{2a}{b}$:

$$BB' = b \cdot \frac{2a}{b} = 2a \quad (3)$$

Norėdami sužinoti likusių trikampio $BB'E$ kraštinių ilgius, taip pat turėsime atitinkamas trikampio ABC kraštines padauginti iš $\frac{2a}{b}$:

$$\begin{aligned}
BE &= a \cdot \frac{2a}{b} = \frac{2a^2}{b} \\
B'E &= c \cdot \frac{2a}{b} = \frac{2ac}{b}
\end{aligned}$$

Dar kartą pažvelkime į 2 pav. Matome, kad trikampio BEF kraštinė BE atitinka trikampio $BB'E$ kraštinę BB' . Jau žinome, kad $BE = \frac{2a^2}{b}$, o $BB' = 2a$, vadinasi BE kraštinės ilgis yra nustatomas, atitinkamos trikampio $BB'E$ kraštinės BB' ilgį padauginus iš $\frac{a}{b}$:

$$BE = BB' \cdot \frac{a}{b} = 2a \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a^2}{b} \quad (4)$$

Daugindami iš to paties santykio $\frac{a}{b}$, gausime ir trikampio BEF įžambinės ilgį BF :

$$BF = B'E \cdot \frac{a}{b} = \frac{2ac}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a^2c}{b^2} \quad (5)$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad nuo šiol kiekvieno kito iš eilės einančio trikampio kraštinių ilgius nustatysime daugindami iš santykio - $\frac{a}{b}$. Taigi išraiška yra tokia:

$$FG = \frac{2a^4c}{b^4}, GH = \frac{2a^6c}{b^6} \dots \quad (6)$$

Dabar galime pabandyti išreikšti trikampio $AB'D$ kraštinės AD ilgį:

$$AD = c + BF + FG + GH + \dots = c + \frac{2a^2c}{b^2} + \frac{2a^4c}{b^4} + \frac{2a^6c}{b^6} + \dots \quad (7)$$

AD išraiškoje galime įžvelgti begalinę geometrinės progresijos sumą, kurią būtų patogiau perrašyti kaip šią sumos eilutę:

$$AD = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a^2c}{b^2} \cdot \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{n-1} \quad (8)$$

Kadangi, tai yra begalinė geometrinės progresijos suma, galime pritaikyti formulę:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad (9)$$

Pritaikę šią formulę, galime pertvarkyti bei supaprastinti AD išraišką:

$$\begin{aligned} AD &= c + \frac{\frac{2a^2c}{b^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \cdot \frac{b^2}{b^2} = \\ c + \frac{2a^2c}{b^2 - a^2} &= \frac{c(b^2 - a^2)}{b^2 - a^2} + \frac{2a^2c}{b^2 - a^2} = \\ \frac{b^2c - a^2c + 2a^2c}{b^2 - a^2} &= \frac{a^2c + b^2c}{b^2 - a^2} = \\ \frac{c(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Taigi supaprastinome bei pertvarkėme išraišką ir nustatėme, kad $AD = \frac{c(a^2+b^2)}{b^2-a^2}$. Panašiu principu galime gauti ir kraštinės $B'D$ išraišką.

Jau žinome, kad pirmosios atkarpos $B'E$ ilgis yra $\frac{2ac}{b}$. Taip pat, kaip jau buvo minėta anksčiau, kiekvieno kito iš eilės einančio trikampio kraštinės ilgius gausime daugindami iš santykio - $\frac{a}{b}$. Dėl to, kitų toliau einančių kraštinės $B'D$ atkarpos ilgių išraiškos bus:

$$\frac{2a^3c}{b^3}, \frac{2a^5c}{b^5}, \frac{2a^7c}{b^7} \dots \quad (10)$$

Panašiai kaip kraštinę AD , kraštinę $B'D$ taip pat galime užrašyti kaip begalinę geometrinės progresijos sumą:

$$B'D = \frac{2ac}{b} + \frac{2a^3c}{b^3} + \frac{2a^5c}{b^5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ac}{b} \cdot \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{n-1} \quad (11)$$

Vėl pritaikome mūsų anksčiau minėtą begalinės geometrinės progresijos sumos formulę bei supaprastiname ir pertvarkome $B'D$ išraišką:

$$B'D = \frac{\frac{2ac}{b}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \cdot \frac{b^2}{b^2} = \frac{2abc}{b^2 - a^2}. \quad (12)$$

Prisiminkime anksčiau pažymėtą išraišką - $\sin 2\alpha = \frac{B'D}{AD}$, įstatykime išreikštus atkarpų ilgius ir supaprastinkime:

$$\sin 2\alpha = \frac{B'D}{AD} = \frac{\frac{2abc}{b^2 - a^2}}{\frac{c(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \quad (13)$$

gavome, kad $\sin 2\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$. Pertvarkę šį reiškinių gauname: $a^2 + b^2 = \frac{2ab}{\sin 2\alpha}$, o mes anksčiau išvedėme, kad $c^2 = \frac{2ab}{\sin 2\alpha}$. Taigi $a^2 + b^2 = \frac{2ab}{\sin 2\alpha} = c^2$, ką ir reikėjo įrodyti.

Literatūra

- [1] Ne'Kiya Jackson and Calcea Johnson (2024). *Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem*. The American Mathematical Monthly, 131(9), 739–752. DOI: [10.1080/00029890.2024.2370240](https://doi.org/10.1080/00029890.2024.2370240).
- [2] polymathematic (2023). *Pythagoras Would Be Proud: High School Students' New Proof of the Pythagorean Theorem [TRIGONOMETRY]*. YouTube video. Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=p6j2nZKwf20>.